Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

9. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Gruppenhomomorphismus, Satz von Lagrange, Symmetrische Gruppe, Bilinearform

Aufgabe 1. ((Gruppe) 2P+2P)

a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Welche der beiden folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

(i) Für $g \in G$ die *Linksmultiplikationsabbildung*:

$$m_g : (G, \cdot) \to (G, \cdot) \quad , \quad h \mapsto g \cdot h$$

(ii) Für die Gruppe $\mathrm{Perm}(G)$ der Bijektionen von G die Abbildung

$$m : (G, \cdot) \to (\mathrm{Perm}(G), \circ) \quad , \quad g \mapsto m_g,$$

die g auf die zugehörige Linksmultiplikation abbildet.

b) Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi_k : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \quad , \quad [a] \mapsto [ka]$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.
Sei nun n eine Primzahl. Für welche $k \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung ϕ_k ein Gruppenisomorphismus?

Aufgabe 2. ((Alleine) 2P+1P+1P)

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und S_n die symmetrische Gruppe.

a) Gegeben sei das Element

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie σ in Zykelschreibweise und bestimmen Sie Ordnung und Signum von σ.

b) Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_r \in S_n$ paarweise disjunkte Zykel und k_i jeweils die Länge von ζ_i. Sei weiterhin

$$\sigma = \zeta_1 \circ \cdots \circ \zeta_r$$

ihre Verknüpfung. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(k_1, \ldots, k_r)$ der Zykellängen ist.

c) Welche Ordnungen von Elementen kommen jeweils in S_4 und S_5 vor?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 3. ((Gruppe) 1,5P+1,5P+1P)

Wir bezeichnen für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ mit D_n die Symmetriegruppe eines regelmäßigen $n-$Ecks [1], d.h. die Menge der abstandserhaltenden Abbildungen des $n-$Ecks auf sich selbst mit Verkettung als Verknüpfung.
Weiterhin bezeichne $s \in D_n$ die Spiegelung an einer (fest gewählten) Symmetrieachse und $d \in D_n$ die Drehung des Polygons um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$.

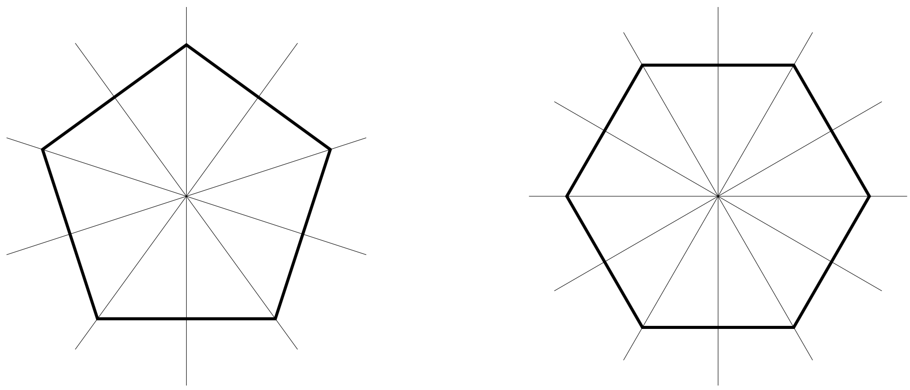
a) Zeigen Sie, dass sich jedes Element in D_n entweder als $d^k s$ oder d^k für ein $k \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt. Wie groß ist demnach die Ordnung von D_n?

b) Zeigen Sie, dass sich jedes Element in D_n als Verknüpfung von ein oder zwei Spiegelungen schreiben lässt.

c) Wir nummerieren die Ecken des $n-$Ecks von 1 bis n. Dies liefert einen injektiven Gruppenhomomorphismus:

$$\iota : D_n \to S_n \quad , \quad \sigma \mapsto \sigma|_{Ecken}.$$

Bestimmen Sie für $D_4 := \{\mathrm{id}, d, d^2, d^3, s, sd, sd^2, sd^3\}$ den Kern von $\mathrm{sgn} \circ \iota$.



Regelmäßiges 5- und 6-Eck mit Symmetrieachsen

[1] Diese Gruppe heißt auch *Diedergruppe*.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 4. ((Alleine) 1P+3P)

Seien V und W zwei $\mathbb{R}$-Vektorräume. Wir nennen eine Abbildung

$$\phi : V \times V \to W \quad , \quad (v, w) \mapsto \phi(v, w)$$

bilinear, falls ϕ in jeder Komponente linear ist, d.h. für alle $v_1, v_2, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\phi(v_1 + \lambda v_2, w) = \phi(v_1, w) + \lambda\phi(v_2, w)$
- $\phi(w, v_1 + \lambda v_2) = \phi(w, v_1) + \lambda\phi(w, v_2)$

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass die Abbildung:

$$\phi_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad (v, w) \mapsto v^t \cdot A \cdot w$$

bilinear ist.

b) Welche der folgenden Abbildungen sind bilinear?

$$\phi_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}) \mapsto v_1w_2 - v_2w_1$$

$$\phi_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad (\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}) \mapsto v_1v_2 + 2w_2w_3$$

$$\phi_3 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad , \quad (\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}) \mapsto v_1 + v_2 + w_1 + w_2$$

Aufgabe 5. (Knobelaufgabe(Gruppe) 2 Bonus-Punkte)

Seien $\tau = (1, 2), \sigma = (1, 2, \dots, n) \in S_n$. Zeigen Sie, dass S_n von τ und σ erzeugt wird.
Hinweis: Was ist $\sigma\tau\sigma^{-1}$?

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 22. 01. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.